



## Σύντομη Παρουσίαση της Αξιοποίησης Ενός Γνωστικά Απαιτητικού Έργου που Υλοποιήθηκε στα Πλαίσια του Ερευνητικού Προγράμματος EDUCATE

**Όνοματεπώνυμο Εκπαιδευτικού:** Αλεξάνδρα Πετεινάρα

**Χώρα:** Ελλάδα

**Θέμα Μαθήματος:** Γωνίες τριγώνων<sup>1</sup>

**Επίπεδο Εκπαίδευσης:** Δευτεροβάθμια

**Ηλικία Μαθητών:** 15-16

**Διάρκεια μαθήματος:** 45' (1 διδακτική ώρα)

### **Μαθησιακοί στόχοι:**

Η εισαγωγή προς διαπραγμάτευση του συγκεκριμένου έργου εστίαζε κυρίως στους παρακάτω στόχους:

- Χρήση των γεωμετρικών οργάνων για κατασκευή των δεδομένων.
- Ανάκληση προηγούμενων γνώσεων.
- Συνδυασμός των δεδομένων και γνώσεων ώστε οι μαθητές να «ανακαλύψουν» καινούργιες ιδιότητες και χαρακτηριστικά στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Για παράδειγμα στο τελικό σχήμα σχηματίζονται ισοσκελή τρίγωνα που δεν είναι καθιερωμένες μορφές και έτσι ίσως είναι δύσκολο κάποιιοι μαθητές να αναγνωρίζουν τη βάση των τριγώνων και τις ίσες γωνίες. Επίσης λόγω της πολυπλοκότητας του σχήματος, μια δυσκολία είναι αν θα μπορούν οι μαθητές ενσωματώνοντας όλα τα δεδομένα που τους δίνονται, να εστιάσουν στην πληροφορία που χρειάζονται για την απόδειξη.
- Ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών για την αντιμετώπιση προκλητικών ερωτημάτων που παραμένουν όμως προσβάσιμα στους μαθητές.
- Συνεργασία μεταξύ των μαθητών σε ομάδες των 2 ή 3 και ανταλλαγή απόψεων.
- Προετοιμασία για προγραμματισμένο διαγώνισμα στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο.
- Η ανάπτυξη της αυτοπεποίθησής τους στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Τα ερωτήματα δεν είναι «εντελώς» ανοικτά αλλά αφήνουν περιθώρια διαπραγμάτευσης και πειραματισμού εκ μέρους των μαθητών. Δίνεται με αυτό τον τρόπο η δυνατότητα στους μαθητές να ασχοληθούν με ένα πρόβλημα, να συζητήσουν, να «ψάξουν» για ιδιότητες σχημάτων που έχουν μάθει, να κατασκευάσουν μόνοι τους τη λύση βήμα προς βήμα αποτυπώνοντας τα δεδομένα στο σχήμα και αξιοποιώντας τα.

---

<sup>1</sup> Τέλος του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου από το Βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία, Τεύχος Α'» 2011, εκδόσεις Διόφαντος (σελ.78-93)



### **Το γνωστικά απαιτητικό έργο:**

Μία άσκηση που συνδυάζει ερωτήματα από τη σχέση γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου, τις κατακορυφών γωνίες, το άθροισμα γωνιών τριγώνου, την εξωτερική γωνία τριγώνου, το άθροισμα των οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου και τη διάμεσο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου.

Η αρχική διατύπωση της άσκησης που προκάλεσε τη δημιουργία αυτού του έργου, ήταν:

**Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΒΔ. Να δειχθεί ότι η ΕΔ διέρχεται από το μέσο Ζ της ΑΓ.**

Η συγκεκριμένη άσκηση δόθηκε στους μαθητές με τη μορφή έργου με επιμέρους ερωτήματα διατυπωμένα σε πιο απλή γλώσσα και με δυνατότητες διερεύνησης από τους μαθητές. Ερωτήματα στα οποία να μπορούν να αξιοποιήσουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους, να χρησιμοποιήσουν υλικό από το κεφάλαιο της τρέχουσας ύλης και να εντοπίσουν χαρακτηριστικά που θα μπορέσουν να τα συνδυάσουν ώστε να απαντούν σ' αυτά. Το ζητούμενο για τους μαθητές θα ήταν να «χτίσουν» στο υπάρχον σχήμα τις πληροφορίες που δίνονται κλιμακωτά. Έχοντας έτσι την ευκαιρία ακόμη και οι αδύνατοι μαθητές να οπτικοποιήσουν τα δεδομένα και να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο του σχήματος για να μεταφέρουν πληροφορίες.

Η διαφοροποίηση κατ' αρχάς υποστηρίζεται από το σχεδιασμό του φύλλου δραστηριότητας. Επειδή οι μαθητές θα χειριστούν μόνοι τους τις πληροφορίες στο σχήμα, χρειάζονται χώρο για το σχεδιασμό που είναι σημαντικός στην επίλυση του προβλήματος και χώρο σημειώσεων σε κάθε βήμα για οτιδήποτε παρατηρούν και θεωρούν ότι θα τους φανεί χρήσιμο σε κάθε νέα πληροφορία ή δεδομένο.

Επιπλέον υποστηρίζεται από τα επιμέρους ερωτήματα. Ιδιαίτερα στο 3<sup>ο</sup> βήμα του έργου, που ζητείται να βρεθεί μια σχέση γωνιών, υπήρχε ως υπόδειξη να χρησιμοποιηθούν συγκεκριμένα μέτρα γωνιών ώστε να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί και να χρησιμοποιηθούν ως βάση για τη γενίκευση.

Το έργο μπορεί να προωθήσει τη γνωστική ενεργοποίηση με τον τρόπο και τη σειρά που είναι διατυπωμένα τα ερωτήματα. Στο 3<sup>ο</sup> ερώτημα χρειάζεται η σχέση των γωνιών Β και Γ. Στο 4<sup>ο</sup> ερώτημα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις ίσες συμπληρωματικές γωνίες. Στο 5<sup>ο</sup> ερώτημα χρειάζονται τα συμπεράσματα του 3<sup>ου</sup> και 4<sup>ου</sup> ερωτήματος.

Τέλος στο τελευταίο ερώτημα, η πρόκληση είναι η ανακάλυψη μιας πρότασης που ισχύει (στο συγκεκριμένο τρίγωνο τουλάχιστον) και δεν έχει διδαχθεί ακόμη.

### **Περιγραφή της εξέλιξης του έργου κατά τη διδασκαλία:**

Στην ολομέλεια της τάξης ανακοινώθηκε ο σκοπός του έργου όπως αναφέρθηκε παραπάνω και επιπλέον ότι αποτελεί μια επανάληψη - προετοιμασία για το διαγώνισμα που είχε καθοριστεί στο αμέσως επόμενο διάστημα.

Τονίστηκε ότι είχε δοθεί μόνο το σχήμα του αρχικού τριγώνου και ότι θα έπρεπε οι μαθητές με τα γεωμετρικά όργανα που έχουν μαζί τους να αποτυπώσουν σε κάθε βήμα τα καινούργια δεδομένα στο αρχικό σχήμα.



Ζητήθηκε από τους μαθητές να καταγράψουν οποιαδήποτε πληροφορία προκύπτει από τα νέα δεδομένα ανεξαρτήτως των παρακάτω ερωτημάτων.

Ενημερώθηκαν ότι ο εκπαιδευτικός θα περνάει από κάθε ομάδα συζητώντας μαζί τους για τυχόν εμπόδια ή διλήμματα που θα αντιμετωπίσουν.

Στην εργασία των μαθητών στις ομάδες τους, ένα εμπόδιο που συνάντησαν ήταν ότι δεν μπορούσαν να συσχετίσουν από την αρχή τη σχέση των γωνιών Β και Γ. Άλλοι μαθητές δεν πρόσεξαν ότι η γωνία Β είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΕΔ. Κάποιοι μαθητές που προχώρησαν σχετικά γρήγορα στα τρία πρώτα ερωτήματα δυσκολεύτηκαν να βρουν τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΔΖ ή να μην μπορούν να δικαιολογήσουν γιατί είναι ισοσκελές. Όσοι χρησιμοποίησαν την υπόδειξη για συγκεκριμένα μέτρα γωνιών, προχώρησαν γρήγορα στα ερωτήματα, αλλά οι πιο αδύνατοι είχαν αδυναμία να γενικεύσουν τα συμπεράσματά τους.

Για τους μαθητές που τελείωσαν το έργο, υπήρξε η δυνατότητα μιας επέκτασης του παραπάνω έργου με το ακόλουθο:

*«Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε την παράλληλη προς τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας  $\hat{B}$  που τέμνει τη ΒΓ στο Ν. Ναδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΝΓ είναι ορθογώνιο.»*

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι μία αντίστροφη διαδικασία από το αρχικό έργο και ως τελικό συμπέρασμα προκύπτει ότι αν σε ένα τρίγωνο μία διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Μία πρόταση που μπορεί να αποδειχθεί με τα μέχρι τότε δεδομένα χωρίς να είναι απαραίτητο οι μαθητές, να έχουν διδαχθεί την ύλη των παραλληλογράμμων.

### **Αναστοχασμός:**

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, στην περιγραφή της εξέλιξης του έργου, οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να σχεδιάσουν, να επέμβουν πάνω στο σχήμα και να ανακαλύπτουν σταδιακά τα ζητούμενα. Τα θετικά στοιχεία της υλοποίησης ήταν:

- Ο τρόπος που ήταν δομημένο το φύλλο εργασίας.  
Σε κάθε καινούργιο δεδομένο υπήρχε χώρος σημειώσεων για τους μαθητές, ώστε να αποτυπώνουν κάποια «κρίσιμα» σημεία με αποτέλεσμα να μπορούν να διαχειριστούν τα δεδομένα και να εστιάσουν στις πληροφορίες που χρειάζονταν για την απόδειξη.
- Τα ερωτήματα που ήταν διατυπωμένα σε απλή γλώσσα.
- Η εμπλοκή των μαθητών στο σχήμα.  
Δεν δόθηκε έτοιμο το σχήμα όπως είναι στο τελικό στάδιο που θα καθιστούσε δύσκολη την εστίαση στις επιμέρους ιδιότητες.
- Η συνεργασία των μαθητών σε ομάδες και η ανταλλαγή απόψεων.
- Η υπόδειξη για χρήση για συγκεκριμένων γωνιών στην επίλυση του προβλήματος.

Μια αναπροσαρμογή που προτείνεται είναι η αρχική πληροφορία του έργου ότι η γωνία Β του τριγώνου είναι διπλάσια της Γ και βρίσκεται πριν από το σχήμα, θα έπρεπε να βρίσκεται κάτω από αυτό μαζί με όλα τα υπόλοιπα βήματα. Ήταν καθοριστικό για την τελική λύση του προβλήματος και αρκετοί μαθητές δεν το πρόσεξαν από την αρχή.

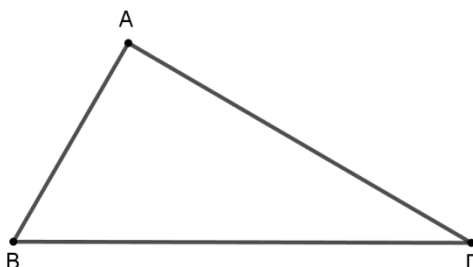


## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΣΤΙΣ ΓΩΝΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΕΝΑ ΤΡΙΓΩΝΟ

### Τμήμα Α3

**Όνοματεπώνυμο:** .....

1. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι η γωνία  $\hat{B}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ .



### **ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

<p>2. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ (προς το Β) κατά τμήμα ΒΕ=ΒΔ.</p>	
<p>3. Η ημιευθεία ΕΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο Ζ. Ποια είναι η σχέση της γωνίας <math>\hat{Z\Delta\Gamma}</math> με τη γωνία <math>\hat{\Gamma}</math> του τριγώνου ΑΒΓ;</p>	
<p>4. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΔΖ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.</p>	
<p>5. Ποια είναι η θέση του σημείου Ζ πάνω στην πλευρά ΑΓ.</p>	
<p>6. Διατύπωσε μια πρόταση που προκύπτει από το παραπάνω πρόβλημα σχετικά με τη διάμεσο του ορθογωνίου τριγώνου.</p>	
<p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>	



Αν τελείωσες τα προηγούμενα ερωτήματα δοκίμασε να προχωρήσεις στην παρακάτω άσκηση:

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Από το μέσο  $M$  της  $A\Gamma$  φέρνουμε την παράλληλη προς τη διχοτόμο  $BD$  της γωνίας  $\hat{B}$  που τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $N$ . Ναδειχθεί ότι το τρίγωνο  $AN\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

