ΝΟΡΜΕΣ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΥΞΗΜΕΝΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΚΛΗΣΗ

Ευσταθία Αποστολοπούλου[1], Ανδρέας Κουλούρης[2], Αλεξάνδρα Πετεινάρα[3], Απόστολος Σίδερης[4], Καλλιόπη Σιώπη[5], Κωνσταντίνος Στουραΐτης[6]

[1]4ο ΓΕΛ Γαλατσίου, [2]3ο ΓΕΛ Γαλατσίου, [3]8ο ΓΕΛ Αθηνών, [4]3ο ΓΕΛ Αλίμου, [5]Πρότυπο ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης, [6]Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

efsapostol@yahoo.gr, akoulouris13@gmail.com, alexpet@ath.forthnet.gr, aposider@gmail.com, kalsiopi@gmail.com, stouraitisk@gmail.com

Περίληψη: Στην παρούσα εργασία μελετάται μια διδασκαλία, που είχε στόχο τη διαφοροποίηση με την ταυτόχρονη διατήρηση της μαθηματικής πρόκλησης σε υψηλό επίπεδο, εστιάζοντας στις νόρμες που ανιχνεύονται σε αυτήν. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν δύο κοινωνικομαθηματικές και τέσσερις κοινωνικές νόρμες. Από αυτές, η αποδοχή των άτυπων και η μετάβαση σε τυπικές μαθηματικές διατυπώσεις, η εγκυροποίηση των αποτελεσμάτων ως αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης από όλους και η δυνατότητα αναζήτησης βοήθειας, αναδεικνύονται ως σημαντικές νόρμες σε μια διδασκαλία με διαφοροποίηση και αυξημένη μαθηματική πρόκληση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κουλτούρα της τάξης και οι κανόνες που ρυθμίζουν την αλληλεπίδραση του εκπαιδευτικού και των μαθητών επηρεάζουν σε σημαντικό βαθμό τη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι νόρμες, δηλαδή οι υπόρρητοι κανόνες που διέπουν τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις στην τάξη (Yackel & Cobb, 1996), μπορεί να ωθούν ή να εμποδίζουν τους μαθητές σε μεγαλύτερη εμπλοκή στο να κάνουν μαθηματικά, στη δημόσια υποστήριξη της άποψής τους, στη διαφοροποίηση του ρυθμού και του τρόπου μάθησης. Οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες θεωρούνται χρήσιμες για την κατανόηση και για την ανάπτυξη διδασκαλιών που εστιάζουν σε συγκεκριμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά, όπως "η ενεργός και υψηλής ποιότητας συμμετοχή των μαθητών σε μαθηματικές συζητήσεις" (Partanen & Kaasila, 2015, σ. 927).

Η παρούσα εργασία μελετά μια διδασκαλία εστιάζοντας στις νόρμες που ανιχνεύονται σε αυτήν. Το σχολικό έτος 2018-19, στο πλαίσιο του EDUCATE[1] (ενός προγράμματος ERASMUS+), μια ομάδα εκπαιδευτικών ενεπλάκη σε σχεδιασμό και αποτίμηση διδασκαλιών που στόχο είχαν τη διαφοροποιημένη διδασκαλία με ταυτόχρονη διατήρηση της μαθηματικής πρόκλησης σε υψηλό επίπεδο. Η πρόκληση αναφερόταν σε έργα που απαιτούν από τους μαθητές μαθηματικό συλλογισμό, σχεδίαση στρατηγικής επίλυσης και διερεύνηση, ενώ η διαφοροποίηση γινόταν αντιληπτή ως προσαρμογή της διδασκαλίας στις διαφορετικές ανάγκες, ρυθμούς, ενδιαφέροντα και ικανότητες των μαθητών. Οι νόρμες της τάξης γενικά και οι νόρμες που οι ίδιοι ως εκπαιδευτικοί προωθούσαν αποτέλεσαν ένα σημείο εστίασης των διερευνήσεών τους. Η εργασία αυτή προέκυψε από αυτή την προσπάθεια.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας μελέτης είναι: Ποιες νόρμες ανιχνεύονται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας των Μαθηματικών με χαρακτηριστικά διαφοροποίησης και αυξημένης μαθηματικής πρόκλησης. Ποιες από αυτές και με ποιο τρόπο υποστηρίζουν τη διαφοροποίηση της διδασκαλίας με διατήρηση της μαθηματικής πρόκλησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι Yackel & Cobb (1996), στο πλαίσιο της τάξης των μαθηματικών, διακρίνουν ανάμεσα στις κοινωνικές και τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες. Οι κοινωνικές σχετίζονται με τη γενική δομή της δραστηριότητας στην τάξη και δυο παραδείγματα είναι: "εξηγούμε και δικαιολογούμε τις λύσεις μας", "δηλώνουμε τη συμφωνία ή τη διαφωνία μας". Οι κοινωνικομαθηματικές αναφέρονται ιδιαίτερα στη μαθηματική δραστηριότητα, για παράδειγμα, μπορεί να προσδιορίζουν τι θεωρείται αποτελεσματική μαθηματική λύση και ποια μαθηματική εξήγηση είναι αποδεκτή (Tatsis & Koleza, 2008).

Οι Yackel & Rasmussen (2002) και οι Partanen & Kaasila (2015) θεωρούν ότι υπάρχει μια αντιστοίχιση ανάμεσα στις νόρμες και τις πεποιθήσεις. Χωρίς να υποτιμάται η αξία της έρευνας γύρω από τις πεποιθήσεις, φαίνεται ότι η μελέτη των νορμών είναι χρήσιμη ιδιαίτερα όταν επιδιώκεται η ανάπτυξη συγκεκριμένων χαρακτηριστικών της διδασκαλίας. Μια τέτοια περίπτωση είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων μαθησιακών περιβαλλόντων που, μέσω της συνεργατικής επίλυσης προβλήματος, έχει στόχο μεταξύ άλλων την καθοδήγηση των μαθητών στην ανάληψη ευθύνης για τη διαδικασία της μάθησης (Κολέζα, 2006).

Οι ερευνητές που μελετούν τις νόρμες στην τάξη των μαθηματικών προσπαθούν να αναγνωρίσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα στις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις μέσα στην τάξη. Οι Yackel & Rasmussen (2002) δηλώνουν ότι οι νόρμες "αναγνωρίζονται από την οπτική του παρατηρητή και υποδεικνύουν μια πτυχή της κοινωνικής πραγματικότητας της τάξης" (σ.

316). Οι ίδιοι, αναγνωρίζουν τις νόρμες παρατηρώντας την αλληλεπίδραση των μαθητών/φοιτητών μέσα στην τάξη και μέσα στις ομάδες εργασίας.

Οι Yackel & Rasmussen (2002) σε ένα πανεπιστημιακό μάθημα μελετούν την προσπάθεια να καλλιεργηθούν νόρμες που προέρχονται από την έρευνα στη στοιχειώδη εκπαίδευση, όπως για παράδειγμα ότι οι φοιτητές πρέπει να ακούν και να προσπαθούν να αποδώσουν νόημα στη σκέψη των άλλων. Στα συμπεράσματά τους αναφέρουν την συνεξέλιξη των κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών με τις ατομικές πεποιθήσεις ως ένα δυναμικό σύστημα, και το όφελος που προκύπτει από την σκόπιμη πρόκληση διαπραγμάτευσης επί των νορμών της τάξης. Από την άλλη, οι Toscano, Sánchez & García (2019) αναλύοντας τις βιντεοσκοπημένες αλληλεπιδράσεις μεταξύ φοιτητών στην ομάδα εργασίας, αναγνωρίζουν νόρμες όπως "ο διδάσκων επικυρώνει τη γνώση και λύνει τις αμφιβολίες". Συμπεραίνουν ότι οι νόρμες που δημιουργούνται σε προηγούμενα σχολικά πλαίσια μπορούν να επηρεάσουν τη μελλοντική δουλειά των εκπαιδευτικών καθώς και ότι συγκεκριμένες νόρμες μπορεί να εμφανίζονται σε πολύ διαφορετικά σχολικά περιβάλλοντα. Οι Tatsis & Koleza (2008) μελετούν ομάδες των δύο φοιτητών κατά την επίλυση συγκεκριμένων έργων και ταυτοποιούν 3 κοινωνικές νόρμες (πχ. η συνεργασία στην ομάδα απαιτεί συμφωνία για τη διαδικασία λύσης του προβλήματος) και 6 κοινωνικομαθηματικές (πχ. η χρήση μιας μαθηματικής μεθόδου χρειάζεται δικαιολόγηση). Οι ερευνητές χρησιμοποιούν τα ευρήματά τους για να προτείνουν την αξιοποίηση της ομαδικής εργασίας των φοιτητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Οι Partanen & Kaasila (2015) μελετούν τις κοινωνικομαθηματικές νόρμες που δημιουργούνται στις αλληλεπιδράσεις σε δύο μικρές ομάδες μαθητών (3 και 4 μαθητών αντίστοιχα), οι οποίοι είχαν εμπειρία χρόνων σε παραδοσιακή διδασκαλία μαθηματικών. Οι ερευνητές αναφέρουν ότι σε ένα παρεμβατικό πλαίσιο, οι μαθητές μαζί με τον δάσκαλο ανέπτυξαν τις εξής νόρμες: α) κατά τη μαθηματική διερεύνηση πρέπει να προσεγγίζουμε το θέμα με δημιουργικό τρόπο, β) κατά τη μαθηματική διερεύνηση γίνονται δεκτές διαφορετικές προσεγγίσεις και όχι μόνο συμβολικές μέθοδοι, και γ) οι ρητές δικαιολογήσεις στα μαθηματικά πρέπει να βασίζονται στις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων. Ωστόσο, στα συμπεράσματά τους τονίζουν "την ισχύ και την επιμονή υπαρχουσών νορμών που έρχονται από εμπειρία χρόνων των εκπαιδευτικών και των μαθητών" (σ. 942).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το EDUCATE είναι ένα διακρατικό πρόγραμμα που στοχεύει στη σύζευξη της γνωστικής ενεργοποίησης (δηλαδή την ενασχόληση των μαθητών με έργα με μαθηματική πρόκληση) και της διαφοροποίησης, φιλοδοξώντας να προωθήσει και τις δύο πτυχές στο μάθημα των Μαθηματικών, παρέχοντας υποστήριξη στους εκπαιδευτικούς και τους εκπαιδευτές εκπαιδευτικών.

Στο πλαίσιο αυτού του προγράμματος μια ομάδα επτά εκπαιδευτικών, με την υποστήριξη ερευνήτριας, σε τακτικές συναντήσεις συζητούσαν θέματα σχετικά με τη διαφοροποίηση και την πρόκληση. Μεγάλο μέρος των συζητήσεων αφορούσε τον σχεδιασμό και την αποτίμηση διδασκαλιών που έκαναν σύμφωνα με τους στόχους του προγράμματος με τη βοήθεια αποσπασμάτων των βιντεοσκοπημένων διδασκαλιών τους. Ένα από τα μαθήματα που έγιναν στο πλαίσιο του προγράμματος αναλύεται στην παρούσα εργασία.

Το μάθημα έγινε σε τμήμα της Β΄ τάξης Δημόσιου Γενικού Λυκείου περιοχής της Αθήνας από τον εκπαιδευτικό (Ε) του τμήματος που συμμετείχε στην ομάδα. Παρατηρητές ήταν οι εκπαιδευτικοί της ομάδας και η ερευνήτρια. Η διάρκεια του μαθήματος ήταν 78 λεπτά (δύο διδακτικές ώρες), ο χρόνος που οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες ήταν συνολικά 30 λεπτά και ο υπόλοιπος χρόνος αφορούσε συζήτηση στην ολομέλεια. Οι μαθητές συγκρότησαν τρεις ομάδες των τεσσάρων, μία των πέντε και μία των τριών και εργάστηκαν για την επίλυση προβλήματος (Εικόνα 1).

1. Αν ένα πολυώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς 2, 3 και 4:
   α) να βρείτε τον, πιθανό, τύπο του
   β) ποιος μπορεί να είναι ο βαθμός του;
   γ) υπάρχουν άλλα πολυώνυμα με τις ίδιες ρίζες 2, 3 και 4; Τι βαθμό θα έχουν;
2. Αν για ένα πολυώνυμο ισχύει P(2)=P(3)=P(4)=1
   α) να βρείτε τον, πιθανό, τύπο του
   β) ποιος μπορεί να είναι ο βαθμός του;
   Αν επιπλέον P(0)=-47
   γ) να βρείτε τον, πιθανό, τύπο του
   δ) ποιος μπορεί να είναι ο βαθμός του;
   ε) υπάρχουν άλλα πολυώνυμα που να ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες; Τι βαθμό θα έχουν;

Εικόνα 1: Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές

Μετά τη διδασκαλία ακολούθησε συζήτηση μεταξύ των εκπαιδευτικών σχετικά με το μάθημα. Ακολούθησαν δύο συναντήσεις ακόμη όπου η συζήτηση επικεντρώθηκε στις νόρμες. Στην ανάλυση αυτή συμμετείχαν οι έξι από τους επτά εκπαιδευτικούς. Στην αρχή ο καθένας έκανε ανεξάρτητη ανάλυση σχετικά με τις νόρμες που αναγνώρισε κατά την παρακολούθηση του βιντεοσκοπημένου μαθήματος. Σε επόμενη συνάντηση και μετά από συζήτηση και διαπραγμάτευση μεταξύ των συμμετεχόντων, οι εκπαιδευτικοί κατέληξαν στην αναγνώριση έξι νορμών, οι οποίες περιγράφονται στη συνέχεια. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται προέρχονται από τη βιντεοσκόπηση του μαθήματος και της συζήτησης που ακολούθησε. Η παρούσα έρευνα είναι μια μελέτη περίπτωσης και η ερευνητική μεθοδολογία που ακολουθήθηκε έχει στοιχεία ανάλυσης περιεχομένου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο συγκεκριμένο μάθημα εντοπίστηκαν δύο κοινωνικομαθηματικές και τέσσερις κοινωνικές νόρμες οι οποίες περιγράφονται παρακάτω. Οι νόρμες 2, 4 και 6 αναλύονται εκτενέστερα θεωρώντας ότι σχετίζονται περισσότερο με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

1. Η νόρμα της μαθηματικής διερεύνησης: Η μαθηματική διερεύνηση είναι βασικό στοιχείο στα μαθηματικά. Βασική διάσταση του "κάνω μαθηματικά" είναι η διερεύνηση.

Στους μαθητές δόθηκε ένα πρόβλημα αυξημένης μαθηματικής πρόκλησης, πρωτότυπο για αυτούς, που απαιτεί διερεύνηση. Ως αποτέλεσμα της διερεύνησης προέκυψαν διαφορετικές προσεγγίσεις: για μια ομάδα το πολυώνυμο έχει την αναλυτική μορφή ενώ για άλλη ομάδα είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Ο εκπαιδευτικός αφήνει όλα τα ενδεχόμενα ανοιχτά: "Δεν είμαστε σίγουροι... Το ψάχνουμε! Μπορεί να μην έχουμε και απάντηση...". Σε κάθε ομάδα οι ιδέες γίνονται αντικείμενο συζήτησης και επεξεργασίας μέχρι να συμφωνηθεί η τελική της πρόταση. Η διαδικασία διερεύνησης και συζήτησης επαναλαμβάνεται μεταξύ των ομάδων και των μαθητών στην ολομέλεια της τάξης μέχρι την εύρεση της γενικότερης λύσης του προβλήματος.

2. Η νόρμα της μαθηματικής επικοινωνίας: Τόσο οι άτυπες όσο και οι τυπικές μαθηματικές διατυπώσεις είναι αποδεκτές. Η μετάβαση από τις άτυπες στις τυπικές δεν εμποδίζει τη διερεύνηση και ευνοεί την κατανόηση.

Η μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην τάξη, τόσο όταν απευθύνονται στον διδάσκοντα όσο και στους συμμαθητές τους, ξεφεύγει συχνά από τις τυπικές διατυπώσεις που χρησιμοποιούνται στο σχολικό εγχειρίδιο ή χρησιμοποιεί ο διδάσκων.

Για παράδειγμα, μία μαθήτρια για το ερώτημα 1α γράφει στον πίνακα (x-ρ)Π. Ο Ε ρωτά: "Σας αρέσει; Είναι λίγο σκόρπιο λίγο ορφανό, πώς θα το συμπληρώνατε;". Ενθαρρύνει έτσι τους μαθητές να σηκωθούν στον πίνακα. Ένας μαθητής σηκώνεται στον πίνακα και συμπληρώνει, λέγοντας συγχρόνως: "τη μία ρίζα (x-2) επί την άλλη ρίζα (x-3) επί την 3η ρίζα (x-4) επί Π(x)". Μία άλλη μαθήτρια διαφωνεί και προτείνει να γραφεί (x-2)Π(x), (x-3)Π(x), (x-4)Π(x). Ο Ε παρεμβαίνει ζητώντας να φτιαχτεί η σχέση λέγοντας "είναι κάτι σκόρπιο, με τι ισούται αυτή η παράσταση;" Οι μαθητές απαντούν με το P(x) και ζητάει από τη μαθήτρια να το συμπληρώσει ώστε να είναι μαθηματικά σωστή η σχέση.

Τελικά, μαθητής που συμπληρώνει σωστά τη σχέση λέει ότι το Π(x) στην 1η σχέση "έχει μέσα του" την άλλη ρίζα άρα το σβήνει και στη θέση του γράφει (x-2)δ(x) και δείχνοντας το δ(x) λέει "αυτό θα έχει μέσα του οπωσδήποτε την άλλη ρίζα (x-4)" και σβήνοντάς το γράφει (x-4)K(x). Για να μείνει στον πίνακα η σχέση P(x)=(x-2)(x-3)(x-4)K(x).

Στη συζήτηση, μετά το πέρας της διδασκαλίας, ο Ε για να εξηγήσει τη μετάβαση από την άτυπη στην τυπική διατύπωση λέει:

> Δεν κάνω εγώ ασκήσεις στον πίνακα. Πρέπει να τις προσπαθήσουν και όταν φτάσουν σε κάποιο σημείο τότε κάνω. Κι όταν κάνω εγώ είναι για να πάμε όλοι μαζί. Το όλοι μαζί σημαίνει "εδώ τι σκεφτόμαστε;" και γράφω εγώ στον πίνακα ώστε να ξεφεύγουμε από τον κακό συμβολισμό…

Υποστηρίζοντας τον τρόπο που διαχειρίστηκε την όποια παρέμβασή του ο Ε λέει ότι όταν συνομιλούν οι μαθητές, το γεγονός αυτό γίνεται πιο αποδεκτό από τους συμμαθητές τους γιατί είναι μια συζήτηση μεταξύ φίλων, δεν είναι ο καθηγητής που μιλάει. Με αυτόν τον τρόπο μπαίνουν στο παιγνίδι, επιπλέον έχουν άλλο επίπεδο επικοινωνίας που ο Ε δεν το έχει. Πολλές φορές μια απάντηση είναι "σφιχτή" και το νόημά της είναι "ψηλά".

3. Η νόρμα της συνεργασίας: Η συνεργασία μεταξύ των μαθητών, σε μικρές ομάδες και στην τάξη, είναι σημαντική, επιδιώκεται και υποστηρίζεται.

Ο Ε υποστηρίζει τη νόρμα ζητώντας από τους μαθητές να δουλέψουν σε ομάδες και δίνοντάς τους χρόνο. Οι μαθητές ανταποκρίνονται συμμετέχοντας στην ομαδική δουλειά και στη συζήτηση στην ολομέλεια και φέρνοντας αποτελέσματα που ατομικά ίσως δεν θα κατάφερναν. Ο Ε δηλώνει ότι είναι μόνιμη επιλογή του να βάζει τους μαθητές να συζητούν μεταξύ τους σε ομάδες γιατί έτσι "μπαίνουν στο παιχνίδι".

4. Η νόρμα της εγκυροποίησης: Η εγκυροποίηση ενός ισχυρισμού είναι αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης σε επίπεδο ομάδας και ολομέλειας.

Ο Ε παροτρύνει τους μαθητές να εκφράσουν τη γνώμη τους για την εγκυρότητα των ισχυρισμών των συμμαθητών τους αποφεύγοντας να πάρει θέση. Ο τρόπος με τον οποίο καταλήγει η ολομέλεια στα συμπεράσματα είναι μέσα από εξαντλητικούς διαλόγους, ακόμα και για απαντήσεις-σκέψεις-ιδέες μαθητών που αρχικά φαίνεται να μην είναι ούτε επιστημονικά άρτιες αλλά ούτε και αυστηρά διατυπωμένες. Μέσω κατάλληλων ερωτήσεων και παραινέσεων του Ε γίνονται τελικά δεκτοί μόνο οι ισχυρισμοί που έχουν διατυπωθεί ορθά και είναι τεκμηριωμένοι σύμφωνα με τη γνωστή μαθηματική θεωρία και σε καμία περίπτωση με μη αιτιολογημένη απόφαση του διδάσκοντα.

Όταν οι ομάδες δουλεύουν αυτόνομα, η εγκυροποίηση των συμπερασμάτων γίνεται κυρίως με διάλογο μεταξύ των μελών με τη συνεχή παρότρυνση του Ε, "Εσείς θα μας πείτε! Τι προτείνετε; Το ψάχνουμε! Δεν είμαστε σίγουροι... Το ψάχνουμε! Μπορεί να μην έχουμε και απάντηση..."

Στην παρουσίαση των απαντήσεων στην ολομέλεια, ο Ε δίνει ιδιαίτερη προσοχή στην κατανόηση από όλους τους μαθητές κάθε ισχυρισμού που ακούγεται, ως απαραίτητη προϋπόθεση για την αποδοχή ή την απόρριψή του α) παροτρύνοντας τους μαθητές να κάνουν διευκρινιστικές ερωτήσεις, β) φροντίζοντας να περάσει στους μαθητές το μήνυμα ότι είναι αποδεκτό να μην καταλαβαίνουν τι είπε κάποιος άλλος, γ) χρησιμοποιώντας την τεχνική της παράφρασης των ισχυρισμών των μαθητών. Για παράδειγμα λέει "Να ξαναπεί την πρότασή του; Την καταλάβατε; Συμφωνείτε;" και παρακάτω "Εγώ δεν το καταλαβαίνω!". Σε επόμενο σημείο αναδιατυπώνει την απάντηση μαθητή προκειμένου να τη θέσει αμέσως μετά στην κρίση της ολομέλειας.

Ενθαρρύνει την αξιολόγηση από τους μαθητές των ισχυρισμών που ακούγονται α) κάνοντας κατάλληλες ερωτήσεις προς την ολομέλεια β) τονίζοντας στους μαθητές ότι η αποδοχή ή απόρριψη των απαντήσεων που διατυπώνουν δεν είναι δική του ευθύνη αλλά δική τους. Ο Ε σχολιάζοντας πρόταση μαθητή, ρωτάει "ταιριάζει;" δεν παίρνει απάντηση και λέει "αν δεν ξέρετε εσείς, εγώ ξέρω;".

Πριν καλέσει την ολομέλεια να αποφασίσει φροντίζει να ακουστούν όλες οι εναλλακτικές απαντήσεις που σκέφτηκαν οι μαθητές. Σε κρίσιμα σημεία της διερεύνησης, ζητά από τους μαθητές να συνοψίσουν τα τελευταία συμπεράσματα, ώστε αυτά να ακουστούν ξεκάθαρα στην τάξη και οι ομάδες να συνεχίσουν να εργάζονται πάνω σε μια κοινά αποδεκτή βάση.

5. Η νόρμα της διατύπωσης γνώμης: Όλοι οι μαθητές έχουν δικαίωμα να διατυπώσουν τη γνώμη τους. Οι απόψεις είναι ισότιμες και συμβάλλουν στον προβληματισμό (τίθενται υπό διαπραγμάτευση στην ολομέλεια).

Η πρώτη φορά που οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες διαρκεί 12 λεπτά. Ο Ε διακόπτει την ομαδική εργασία ζητώντας από "όποια ομάδα θεωρεί ότι δεν έχει προχωρήσει ικανοποιητικά να πει τη βασική της σκέψη, ποια είναι η προσπάθεια της;". Η επιλογή του Ε να μην καθορίσει ο ίδιος ποια ομάδα θα μιλήσει πρώτη, δηλώνει την αξία που δίνει στις σκέψεις και τις απόψεις όλων και στην συμβολή τους στο συλλογικό προβληματισμό.

Αργότερα και παρά την διατύπωση ορθής λύσης και απόδειξης από μαθητές, ο Ε ρωτά ξανά τις ομάδες αν κάποια έχει σκεφτεί κάτι διαφορετικό. Μια ομάδα διατυπώνει μία σκέψη η οποία για τους παρατηρητές εκπαιδευτικούς είναι προφανές ότι δεν οδηγεί πουθενά. Προς έκπληξη όλων, ο Ε καλεί στον πίνακα τον μαθητή να γράψει τη λύση που προτείνει. Η πρόταση συζητείται εκτενώς και αναδεικνύεται το αδιέξοδο. Στη συζήτηση μετά το μάθημα λέει ότι ο μαθητής "πρέπει να αισθάνεται ότι δεν απειλείται" και για αυτό πρέπει να έχει χρόνο να κάνει και να συζητήσει μαθηματικά.

6. Η νόρμα της αναζήτησης βοήθειας: Ενθαρρύνεται η αναζήτηση βοήθειας, αφού είναι αποδεκτό ότι όλοι οι μαθητές δεν έχουν το ίδιο μαθηματικό υπόβαθρο.

Ο Ε επέλεξε με την έναρξη της διδασκαλίας να θέσει αυτή τη νόρμα στην τάξη και να υποδείξει με σαφήνεια τους πόρους που την υποστηρίζουν: οι έτοιμες υποδείξεις, το σχολικό βιβλίο, οι συμμαθητές τους και οι παρευρισκόμενοι εκπαιδευτικοί. Για την αναζήτηση βοήθειας αφήνει την πρωτοβουλία στους μαθητές:

> «αν μια ομάδα δυσκολευτεί ιδιαίτερα, έχω κάποια φύλλα πάνω στην έδρα με κάποιες υποδείξεις … άρα, αν θέλετε [μπορείτε] να ανοίξετε κάποιο βιβλίο να θυμηθείτε κάτι από τα παλιά ή [μπορείτε] να ρωτήσετε … να ρωτήσετε πρώτα τους συμμαθητές σας και μετά εμάς για βοήθεια».

Ο ίδιος αναγνωρίζει ότι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτή την πρακτική: "αν και δε θυμούνται έχω την αίσθηση δεν ανατρέχουν ούτε στο βιβλίο". Λόγω της φύσης του προβλήματος υπήρξε η ανάγκη σχεδόν από το σύνολο των μαθητών να θυμηθούν στοιχεία του περιεχομένου της ενότητας, γεγονός που οδήγησε κάποιους να την αναζητήσουν στο σχολικό βιβλίο.

Η παρατήρηση της δυσκολίας των μαθητών να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα και η μη ανάληψη πρωτοβουλίας αναζήτησης βοήθειας προβλημάτισε τον διδάσκοντα και τους παρατηρητές. Τέθηκε το δίλλημα κατά πόσο είναι αναγκαία η παρέμβαση για βοήθεια από τον διδάσκοντα όπως φαίνεται από το διάλογο μεταξύ Ε και παρατηρητή (Π):

> Ε: να παρέμβουμε;
>
> Π: Ίσως χρειάζεται.
>
> Ε: Άστο, θα δείξει".

Είναι αξιοσημείωτο ότι η επισήμανση-υπόδειξη του διδάσκοντα για τη διάθεση γραπτών υποδείξεων βοήθειας πέρασε απαρατήρητη και η βοήθεια των υποδείξεων έμεινε ανεκμετάλλευτη. Φαίνεται ότι οι μαθητές θεωρούν ότι η παροχή βοήθειας είναι αποκλειστικότητα του διδάσκοντα έχοντας δυσκολία να αναλάβουν οι ίδιοι την ευθύνη που τους αναλογεί για τη μάθησή τους.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση προέκυψαν έξι νόρμες. Δύο κοινωνικομαθηματικές: 1) της μαθηματικής διερεύνησης και 2) της μαθηματικής επικοινωνίας και τέσσερις κοινωνικές: 3) της συνεργασίας, 4) της εγκυροποίησης, 5) της διατύπωσης γνώμης και 6) της αναζήτησης βοήθειας.

Η νόρμα 6 δεν ανιχνεύεται σε άλλες έρευνες, κάτι που ερμηνεύουμε με τον ειδικό στόχο της διαφοροποίησης που είχε η συγκεκριμένη διδασκαλία. Οι υπόλοιπες νόρμες είναι συμβατές ή έχουν πολλά κοινά με τις νόρμες που ανιχνεύουν οι Yackel & Rasmussen (2002), οι Tatsis & Koleza (2008) και οι Partanen & Kaasila (2015) στις έρευνές τους. Για παράδειγμα, η απαίτηση οι φοιτητές να εξηγούν και να δικαιολογούν τη σκέψη τους βρίσκεται στις δύο πρώτες έρευνες, ενώ στην τρίτη βρίσκουμε την απαίτηση οι ρητές δικαιολογήσεις των μαθητών στα μαθηματικά να βασίζονται στις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων. Οι διαφορετικές αποχρώσεις στη διατύπωση των νορμών θα μπορούσαν να ερμηνευτούν από τις διαφορές στους στόχους των παρεμβάσεων, στα υποκείμενα των ερευνών και στις προηγούμενες εμπειρίες και τις προτιμήσεις των ερευνητών.

Κάποιες νόρμες βρίσκονται σε αντίθεση με τα ευρήματα άλλων ερευνών, για παράδειγμα η 4 είναι αντίθετη με τη νόρμα "ο διδάσκων επικυρώνει τη γνώση" που ανίχνευσαν οι Toscano, Sánchez & García (2019). Οι ίδιοι ερευνητές ανίχνευσαν νόρμες όπως "οι εξηγήσεις στις απαντήσεις των έργων δεν είναι αναγκαίες γιατί χάνεται χρόνος" και "ένα μαθηματικό αποτέλεσμα είναι ή δεν είναι σωστό ανάλογα με την περίσταση", οι οποίες είναι αντίθετες με τις 2, 4 και 5. Οι διαφορές των ευρημάτων τους με τα ευρήματα της παρούσας και των υπολοίπων ερευνών που προαναφέρθηκαν θα μπορούσε να ερμηνευτεί από την εστίαση των Toscano κ.α. στις νόρμες που εμφανίζονται στις ομάδες των φοιτητών χωρίς την παρέμβαση του εκπαιδευτικού και χωρίς προσπάθεια καθιέρωσης συγκεκριμένων νορμών.

Σε σχέση με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, θεωρούμε ότι μέσα από τον υψηλό βαθμό εμπλοκής των μαθητών και τα τελικά αποτελέσματα της διερεύνησης, αναδεικνύεται ο σημαντικός ρόλο των νορμών 1, 2, 4 και 5. Ειδικότερα η 2 (η αποδοχή των άτυπων και η μετάβαση σε τυπικές μαθηματικές διατυπώσεις) και η 4 (η εγκυροποίηση ως αποτέλεσμα διαπραγμάτευσης από όλους) υποστηρίζουν την εμπλοκή των μαθητών με διαφοροποιημένο ρυθμό και τρόπο σε ένα έργο αυξημένης μαθηματικής πρόκλησης. Η νόρμα 6 θα υποστήριζε ιδιαιτέρως τη διαφοροποίηση, αλλά οι μαθητές δεν φάνηκε να είναι έτοιμοι να την υιοθετήσουν. Τέλος, η νόρμα 3 αναδεικνύει τη συνεργασία ως ευνοϊκό περιβάλλον για την εμπλοκή όλων των μαθητών.

Η διδασκαλία είχε στόχο τη σύζευξη της διαφοροποίησης με τη μαθηματική πρόκληση και μόνο έμμεσα αναφέρονταν στις νόρμες. Αυτό δημιουργεί περιορισμούς στην παρούσα έρευνα που θα μπορούσαν να αναιρεθούν με τη μελέτη κάποιων συστηματικών παρεμβάσεων στην τάξη με στόχο την καθιέρωση εκείνων των νορμών που θεωρείται ότι προωθούν τους συγκεκριμένους στόχους. Επιπλέον, η μελέτη των νορμών σε διαφορετικές τάξεις, με διαφορετικούς εκπαιδευτικούς αλλά με τους ίδιους στόχους θα εμπλούτιζε την κατανόησή μας γύρω από τα ερευνητικά ερωτήματα.

Σημείωση: Αυτή η μελέτη διεξήχθη στο πλαίσιο του προγράμματος «Enhancing Differentiated Instruction and Cognitive Activation in Mathematics Lessons by Supporting Teacher Learning (EDUCATE)» που χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η παρούσα δημοσίευση δεσμεύει μόνο τους συντάκτες της και η Επιτροπή δεν ευθύνεται για τυχόν χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Partanen, A. M., & Kaasila, R. (2015). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(4), 927-946.

Toscano, R, Sánchez, V., García, M. (2019). Combining Theoretical Approaches: Socio-Didactic-Mathematical Norms and Perspectives in Pre-service Secondary Mathematics Teachers’ Discourse. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(3), 455–466

Tatsis, K. & Koleza, E. (2008) Social and socio-mathematical norms in collaborative problem-solving. *European Journal of Teacher Education, 31*(1), 89-100, DOI: 10.1080/02619760701845057

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 313-330). Springer, Dordrecht.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477

Κολέζα, Ε. (2006). *Μαθηματικά και σχολικά μαθηματικά: επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.