Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Περιεκτικές Εξετάσεις

- Καθαρά Μαθηματικά (ΠΓΕ)
    - Μιγαδική Ανάλυση
    - Γεωμετρία
    - Άλγεβρα
    - Πραγματική Ανάλυση
- Στατιστική Θεωρία

Χειμερινό Εξάμηνο 2007-2008
6 Οκτωβρίου 2007

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Χειμερινό Εξάμηνο 2007-2008

Περιεκτική Γραπτή Εξέταση
Καθαρά Μαθηματικά

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Ταυτότητας: ....

6 Οκτωβρίου 2007
(09:00-13:00)

1. Let $f: S^2 \longrightarrow S^4$ be the map defined by

$$f(x, y, z) = (xy, xz, x^2, y, z)$$

for $(x, y, z) \in S^2$, i.e. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ with $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Show that f is differentiable in the point $p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S^2$.

2. a) Let M be a connected Riemannian manifold. Formulate three conditions which are equivalent to the following:

M is geodesically complete.

b) Let $(M, \langle , \rangle^M)$ and $(N, \langle , \rangle^N)$ be Riemannian manifolds and $f: M \longrightarrow N$ an isometry, i.e. a diffeomorphism such that

$$\langle df_p v, df_p w \rangle^N_{f(p)} = \langle v, w \rangle^M_p \quad \text{for all} \quad p \in M, \ v, w \in T_p M.$$

(i) Show that

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y) \quad \text{for all} \quad x, y \in M$$

where d_N respectively d_M denotes the Riemannian distance of N and M respectively.

(ii) Let $\gamma : I \longrightarrow M$ be a geodesic in M, with $||\dot{\gamma}(t)|| = 1 \ \forall \ t \in I$. Show that $f \circ \gamma$ is a geodesic in N.

ALGEBRA QUALIFYING EXAM
06/10/07

1. Let G be a finite group of order p^2q, where p and q are primes. Show that G is not simple, i.e., it has a nontrivial normal subgroup.

2. Let $F \subset E$ be an algebraic field extension. Show that

   (a) If every polynomial $f(x) \in F[x]$ splits over E, then E is algebraically closed.

   (b) If every polynomial $f(x) \in F[x]$ has a root in E and F has characteristic 0, then E is algebraically closed.

Exercise 1:

Let γ be a smooth Jordan curve and φ be a continuous complex function on γ. Assume that $0 \in \operatorname{int}(\gamma)$. Show that

$$\int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = 0 \quad \forall z \in \operatorname{int}(\gamma) \Leftrightarrow \int_{\gamma} t^{n} \varphi(t)\, dt = 0 \quad \textit{for} \quad n = -1, -2, -3, \ldots$$

Exercise 2:

Compute the integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \sin\frac{1}{z} dz$, $C(0,1) = \{z \in C : |z| = 1\}$.

Problem

Part A:

a) What do you know about the Theorem of Carathéodory?

b) How is this Theorem applied to the construction of the Lebesgue-Stieltjes measures?

Part B:

Let $-\infty < \alpha < b < \infty$ and let the function $f : [\alpha, b] \to$ R.

a) When f is Riemann integrable?

b) Show that if f is Riemann integrable, then f is Lebesgue integrable.

c) If f is Lebesgue integrable then give a condition that makes f Riemann integrable.

Part C:

Let $f : [0, \infty[\to$ R be a continuous function.

a) If f is Lebesgue integrable, then what can you say about the limit

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t f(x)dx \text{ ?}$$

b) Assume that the limit $\lim_{t \to \infty} \int_0^t f(x)dx$ exists and that it is a real number. Then what can you say about the Lebesgue integrability of f?

\EK

Πανεπιστημιο Κυπρου
Τμημα Μαθηματικων και Στατιστικης

Χειμερινό Εξάμηνο 2007-2008

Περιεκτική Εξέταση – Στατιστική Θεωρία

Ονοματεπώνυμο ....

Αριθμός ταυτότητος ....

6 Οκτωβρίου (09:00-12:00)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2007

1. Το ποσοστό συρρίκνωης X κάποιου τύπου καρκίνου όταν αυτός εκτίθεται σε ραδιενέργεια ακολουθεί την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{3 - 3\lambda(x-1)^2}{3-\lambda}, \quad x \in (0,1),$$

όπου $\lambda \in (0,1)$ είναι άγνωστη παράμετρος.

(α') Να υπολογιστεί η μέση τιμή της X και να αποδειχτεί ότι είνα αύξουσα συνάρτηση της λ.

(β') Να υπολογιστεί η διακύμανση της X.

(γ') Από ένα δείγμα 100 καρκίνων στους οποίους έγινε θεραπεία, το ποσοστό συρρίκνωσης υπολογίστηκε και τελικά βρέθηκε ότι ο μέσος όρος συρρίκνωσης ήταν ίσος με 55%. Να δοθεί μία ασθενώς συνεπής εκτιμήτρια της παραμέτρου λ.

(δ') Να δοθεί μία ασθενώς συνεπής εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης της X, έστω σ.

(ε') Να κατασκευάσετε 90% ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο λ.

2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα με $X_i \sim U[0,\theta]$, $\theta > 0$.

(α') Για οποιοδήποτε $s \in \mathbb{N}$ δώστε την αντίστοιχη εκτιμήτρια $\widehat{\theta}_S$ της θ με την μέθοδο των ροπών βασισμένη στην ροπή s-τάξης της X_i.

(β') Γιά κατάλληλη ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ δώστε την οριακή (για $n \to \infty$) κατανομή της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $a_n(\widehat{\theta}_S - \theta)$.

(γ΄) Δώστε την εκτιμήτρια $\widehat{\theta}_{ML}$ της θ με την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας καθώς και την οριακή (για $n \to \infty$) κατανομή της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $c_n(\widehat{\theta}_{ML} - \theta)$, όπου $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία κατάλληλα επιλεγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών.

(δ΄) Βάσει της οριακής συμπεριφοράς των $a_n(\widehat{\theta}_S - \theta)$ και $c_n(\widehat{\theta}_{ML} - \theta)$, συγκρίνεται την συμπεριφορά των εκτιμητριών $\widehat{\theta}_s$ και $\widehat{\theta}_{ML}$.

3. Έστω Z_i ανεξάρτητες και ισόνομές τυχαίες μεταβλητές από την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση θ, για $i = 1, 2$. Θεώρειστε τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές

$$\begin{aligned} X &= (Z_1 - Z_2)^2, \\ Y &= Z_1 Z_2. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα είνα να γίνει σύγκρισή των παρακάτω εκτιμητρίων

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \frac{X}{2}, \\ \hat{\theta}_2 &= |Y|, \\ \hat{\theta}_3 &= \text{η εκτιμήτρια μεθόδου ροπών με βάση την δεσμευμένη} \\ &\quad\ \text{κατανομή της } Y \text{ δοθέντος } X, \\ \hat{\theta}_4 &= E\left[\frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2} \mid (X, Y)\right], \end{aligned}$$

μέ βάση το μέσο τετραγωνικό τους σφάλμα $MSE_i(\theta) = E[(\hat{\theta}_i - \theta)^2]$, για $i = 1, 2, 3, 4$.

(α΄) Να αποδειχτεί ότι $MSE_2(\theta) < MSE_1(\theta)$.

(β΄) Να υπολογιστεί η εκτιμήτρια $\hat{\theta}_3$ με βάση τις X και Y και να υπολογιστεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της.

(γ΄) Να υπολογιστεί η εκτιμήτρια $\hat{\theta}_4$ με βάση τις X και Y και να υπολογιστεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της.

4. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα όπου η X_i έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-(x-\mu)/\lambda}, \quad x \in [\mu, \infty),$$

όπου $\lambda > 0$ γνωστό και $\mu > 0$ άγνωστο. Έστω ο έλεγχος

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \quad \text{ενάντια} \quad H_1: \ \mu > \mu_0.$$

(α') Δείξτε ότι ο έλεγχος πηλίκων πιθανοφάνειας της πιό πάνω μηδενικής και εναλακτικής υπόθεσης απορρίπτει αν

$$X_{(1)} < \mu_0, \quad \text{ή} \quad X_{(1)} > \max\{\mu_0, k\},$$

όπου k είναι μία κατάλληλα επιλεγμένη σταθερά και $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

(β') Δείξτε ότι αν το επίπεδο του ελέγχου είναι $\alpha \in (0, 1)$, τότε η σταθερά καθορίζεται από

$$k = \mu_0 - \frac{\lambda}{n} \ln(\alpha).$$

5. Έστω X τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανοή F είναι άγνωστη και ας θεωρήσουμε τον εξής έλεγξο:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & F \text{ είναι η κατανομή της ομοιόμορφης στο } (0, 1), \\ H_1 : \quad & F \text{ είναι η κατανομή της τυπικής κανονικής.} \end{aligned}$$

Να προσδιοριστεί ο ισχυρότατος έλεγχος επιπέδου σημαντικότητας $\alpha = 0.01$ και να υπολογιστεί η ισχύς του.