

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ
ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2003-2004

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Ταυτίζοντας το σύνολο των πραγματικών 2×2 -πινάκων $M(2, \mathbf{R})$ με τον \mathbf{R}^4 , δείξτε ότι το σύνολο

$$SL(2, \mathbf{R}) = \{A \in M(2, \mathbf{R}) \mid \det A = 1\}$$

είναι υποπολλαπλότητα του \mathbf{R}^4 .

2. Έστω ω η 2-μορφή

$$\omega = (x + \cos y + \cos z) dy \wedge dz + (e^{xz} + y) dz \wedge dx + (\sin xy + z) dx \wedge dy,$$

και $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ η μοναδιαία σφαίρα στο \mathbf{R}^3 .

Να υπολογισθεί

$$\int_{S^2} \omega.$$

3. Έστω M συμπαγής πολλαπλότητα διάστασης n και $f : M \rightarrow \mathbf{R}^n$ C^∞ -διαφορίσιμη απεικόνιση. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in M$ τέτοιο ώστε το διαφορικό της f στο x , df_x να μην είναι αντιστρέψιμο.

4. i) Έστω $\pi : S^2 \rightarrow \mathbf{RP}^2$, $(x, y, z) \mapsto [(x, y, z)]$. Δείξτε ότι η π είναι διαφορίσιμη και immersion.
- ii) Είναι η απεικόνιση $g : \mathbf{RP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $[(x, y, z)] \mapsto (xy, yz, z^2)$, immersion.
-

5. Έστω

$$\begin{aligned} X &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \\ Y &= x^2 y \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega &= (x^3 + y^3 + z^3)(dx \wedge dy + dz \wedge dx + dy \wedge dz) . \end{aligned}$$

i) Να υπολογισθεί $[X, Y]$.

ii) Να περιγράψετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου Y στο \mathbf{R}^3 που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0) .

iii) Αν $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ είναι η συνάρτηση

$$f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

να υπολογισθεί

$$f^*(d\omega) .$$

iv) Να υπολογισθεί $L_X \omega$.

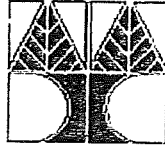
6. i) Έστω M μια C^∞ πολλαπλότητα, $\Lambda(M)$ το σύνολο των εξωτερικών διαφορικών μορφών στην M , $Z(M)$ οι κλειστές μορφές και $B(M)$ οι ακριβείς μορφές. Δείξτε ότι η $Z(M)$ είναι υποάλγεβρα της $\Lambda(M)$ και $B(M)$ είναι ιδεώδες της $Z(M)$.

ii) Έστω ω C^∞ 1-μορφή στο μοναδιαίο κύκλο S^1 με

$$\int_{S^1} \omega = 0.$$

Δείξτε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $f : S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $\omega = df$.

(Υπόδειξη: $\phi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$).



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

Θεωρία Πιθανοτήτων

Όνοματεπώνυμο:

Αρ. Ταυτότητας:

Εαρινό Εξάμηνο 2003-2004

31 Ιανουαρίου 2004

09:00 – 12:00



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Θέμα 1^ο

(α) Δείξτε ότι ένα μέτρο μ ορισμένο σε ένα δακτύλιο \mathbf{R} του Ω είναι τότε και μόνον τότε σ -πεπερασμένο εάν υπάρχει ένας διαχωρισμός (μία διαμέριση) $\{\mathbf{B}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ του Ω με $\mathbf{B}_n \in \mathbf{R}$ και $\mu(\mathbf{B}_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

(β) Εστω $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, μ -πεπερασμένο μέτρο και $\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ακολουθία ενδεχομένων στο \mathfrak{F} .

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Fatou, δείξτε

$$(i) \quad \mu \left(\liminf_n A_n \right) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

$$(ii) \quad \mu \left(\limsup_n A_n \right) \geq \limsup_n \mu(A_n).$$



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Θέμα 2^ο

(α) Εστω μ το περιεχόμενο ορισμένο στον ημιδακτύλιο \mathbf{I}^1 των δεξιά ανοικτών διαστημάτων του \mathbf{R} . Δείξτε ότι το μ είναι σ -υπερπροσθετικό στο \mathbf{I}^1 .

(β) Εστω $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ χώρος μέτρου. Δώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η σταθερή συνάρτηση:

$$\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \omega \mapsto \mathbf{T}(\omega) := c \in \mathbf{R},$$

μ -ολοκληρώσιμη.

(γ) Εστω $f : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\overline{\mathbf{R}}, B_{\overline{\mathbf{R}}})$ μια $\mathfrak{F} | B_{\overline{\mathbf{R}}}$ μετρήσιμη συνάρτηση και \mathbf{N} ένα σύνολο με $N \in \mathfrak{F}$ και $\mu(N) = 0$.

Δείξτε ότι ισχύει:

(i) $\mathbf{1}_N f \in L^1(\mu)$

(ii) $\int_N f d\mu = 0$



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Θέμα 3^ο

- (α) Εξετάστε αν το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\eta \mu x}{x} dx$ υπάρχει κατά Lebesgue.
- (β) Έστω $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ χώρος μέτρου με $A, B \in \mathfrak{F}$, $B \subset A$. Δείξτε ότι

$$\int_{\Omega} (I_A(x) - I_B(x))^2 d\mu = \mu(A - B),$$

όπου I_C η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου C .

- (γ) Έστω $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ χώρος μέτρου με $f, g: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. Αν f, g μετρήσιμες συναρτήσεις με $f \equiv 0$ μ -σ.π. και $g \equiv 0$ μ -σ.π., δείξτε ότι $f + g \equiv 0$ μ -σ.π.

Συμβολισμός: μ -σ.π. σημαίνει μ -σχεδόν παντού.



Θέμα 4:

Έστω X_i με $i = 1, 2, \dots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και κοινή διασπορά σ^2 . Ορίζω

$$Y_n = n^{-\alpha} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου α γνωστή θετική σταθερά. Έστω $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ αύξουσα οικογένεια σ -πεδίων (σ -αλγεβρών) έτσι ώστε και η X_n και η Y_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμες.

(α) Να δειχθεί ότι $\forall n \geq 1$ και $\forall m \geq 0$, $E(Y_{n+m} | \mathcal{F}_n) = r^{2\alpha} Y_n$ με πιθανότητα 1 όπου r ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ Y_n και Y_{n+m} .

(β) Μελετήστε τη σύγκλιση με πιθανότητα 1 της ακολουθίας $\{Y_n\}$.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Θέμα 5:

Ένα τυχαίο σημείο στο χώρο δίνεται από τρεις συντεταγμένες οι οποίες ορίζουν ένα τρισδιάστατο σύστημα κανονικών τυχαίων μεταβλητών με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{8} \left[2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2 \right]\right)$$

(α) Να προσδιορισθεί ο πίνακας συνδιακύμανσης (variance-covariance matrix) των τυχαίων μεταβλητών X , Y και Z .

(β) Να προσδιορισθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W = Y + Z$.

(γ) Θεωρήστε ότι όλα τα δεδομένα παραμένουν ως έχουν εκτός από το συντελεστή συσχέτισης ρ μεταξύ των Y και Z για τον οποίο είναι γνωστό μόνο ότι είναι θετικός.

Κάτω από την υπόθεση ότι $P[-\sqrt{4} \leq Y \leq \sqrt{4} \mid Z = -5] = 0.954$ να προσδιορισθεί το ρ .

Δίδονται τα εξής: $\Phi(1)=0.84$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.977$, $\Phi(3)=0.9985$ όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

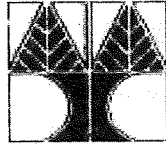


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Θέμα 6:

Βλήμα εκτοξεύεται κατά στόχου O ο οποίος λαμβάνεται ως αρχή του ορθογωνίου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων στο κατακόρυφο επίπεδο το διερχόμενο διά του O . Έστω X και Y οι συντεταγμένες του σημείου προσκρούσεως. Τότε X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες θεωρούμε τη 2-διάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 25$ και συντελεστή συσχέτισης ρ . Κάτω από την υπόθεση ότι $\rho = 0$ να προσδιορισθεί η πιθανότητα ώστε το σημείο προσκρούσεως να βρίσκεται

- (i) εντός τετραγώνου με κέντρο το σημείο O και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες και μήκους 50 cm εκάστη και
- (ii) εντός κύκλου με κέντρο το σημείο O και ακτίνα 20 cm.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

Στατιστική Θεωρία

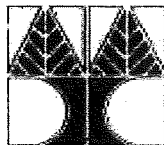
Όνοματεπώνυμο:

Αρ. Ταυτότητας:

Εαρινό Εξάμηνο 2003-2004

7 Φεβρουαρίου 2004

09:00 – 12:00



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

1. Έστω τυχαίο δείγμα $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ από την (συνεχή) ομοιόμορφη κατανομή $U(0, \theta)$.

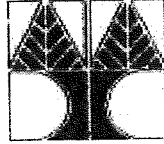
(α) Να προσδιορισθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) για την παράμετρο θ .

(β) Να προσδιορισθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο θ .

(γ) Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$

καθώς και της $Z = F(Y_{(n)})$ όπου F η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την $U(0, \theta)$.

(δ) Να προσδιορισθεί το ελαχίστου μήκους 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ .



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

2. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$f(x; \theta)$, $\theta \in \Omega = \{0, 1\}$. Έστω επίσης $L(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$. Έστω ο έλεγχος

$$H_0 : \theta = 0 \text{ έναντι } H_1 : \theta = 1.$$

(α) Να δοθεί ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση ϕ σε επίπεδο σημαντικότητας α ($0 < \alpha < 1$). Ποια μορφή παίρνει αυτή όταν η $f(x; \theta)$ επιλέγεται να είναι η $N(\theta, 1)$;

Για τα επόμενα ερωτήματα να χρησιμοποιηθεί η $N(\theta, 1)$.

(β) Να δοθεί ο ορισμός της ισχύος της ελεγχοσυνάρτησης ϕ και να αποδειχθεί ότι είναι τουλάχιστον ίση με το μέγεθος της ελεγχοσυνάρτησης.

(γ) Να δειχθεί ότι η ελεγχοσυνάρτηση ϕ είναι ομοιομόρφως ισχυρότατη για τον έλεγχο

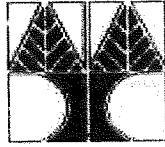
$$H_0 : \theta = 0 \text{ έναντι } H_1 : \theta > 0.$$

(δ) Να αποδειχθεί ότι η ελεγχοσυνάρτηση ϕ δεν δύναται να αποτελεί την ομοιομόρφως ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο

$$H_0 : \theta = 0 \text{ έναντι } H_1 : \theta \neq 0.$$

Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει ομοιομόρφως ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο αυτό. Να εξηγήσετε τους ισχυρισμούς σας.

(ε) Εξηγήστε με ποιόν τρόπο επιτυγχάνεται ο εντοπισμός ομοιομόρφως ισχυρότατης ελεγχοσυνάρτησης μέσα σε κατάλληλα επιλεγμένα κλάση ελεγχοσυναρτήσεων για τον έλεγχο του ερωτήματος (δ).



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

3. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από συνεχή κατανομή. Έστω $X^{(*)} = (X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})'$ το αντίστοιχο διατεταγμένο τυχαίο δείγμα, και $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)'$ το διάνυσμα των τάξεων των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots, X_n . Υποθέτουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές μεταξύ τους, δηλαδή δεν υπάρχουν ties στο τυχαίο δείγμα.

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του διανύσματος R .

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος $X^{(*)}$ και να εξεταστεί αν τα διανύσματα R και $X^{(*)}$ είναι ανεξάρτητα.

(γ) Αν επιπλέον η κατανομή του τυχαίου δείγματος X_1, X_2, \dots, X_n είναι συμμετρική ως προς το 0, να βρεθούν οι κατανομές των διανυσμάτων

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)' \text{ και } Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)',$$

όπου $Y_i = \text{sign}(X_i), i = 1, 2, \dots, n$ και $Z_i = |X_i|, i = 1, 2, \dots, n$ με

$$\text{I.1} \text{ την απόλυτη τιμή και } \text{sign}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases}.$$



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

4. Για $\lambda > 0$, η τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται θετική Poisson με παράμετρο λ αν έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας της μορφής

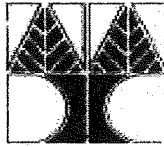
$$f_X(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!(e^\lambda - 1)}, \text{ για } x = 1, 2, 3, \dots$$

και 0 αλλιώς.

- α) Να υπολογιστούν οι πρώτες δύο κεντρικές ροπές της X .

β) Έστω ότι αντί της X , παρατηρούμε την τυχαία μεταβλητή $V(X)$ η οποία ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο: έστω U_1, U_2, \dots, U_n ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και $V(n) = \min\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ για $n = 1, 2, 3, \dots$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(V(X) > \nu)$ για όλα τα ν .

γ) Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις που έχουμε είναι όπως στο (β). Έστω λ_0 σταθερά. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ομοιομόρφως ισχυρότατος έλεγχος επιπέδου σημαντικότητας α για $H_0 : \lambda = \lambda_0$ ως προς την εναλλακτική $H_1 : \lambda < \lambda_0$.



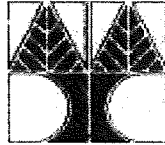
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

5. Έστω Y τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, δηλαδή

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι δοθέντος Y , έχουμε ένα τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n από την κανονική κατανομή με μέση τιμή θ και διακύμανση $1/Y$, όπου $\theta \in (-\infty, \infty)$ και είναι άγνωστη παράμετρος.

- α) Να υπολογίσετε το Cramer—Rao κάτω φράγμα για την παράμετρο θ .
- β) Να δείχτεί ότι δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ η οποία επιτυγχάνει το Cramer—Rao κάτω φράγμα.
- γ) Γιατί το Cramer—Rao κάτω φράγμα δεν επιτυγχάνεται σε αυτήν την περίπτωση;
- δ) Ποια εκτιμήτρια θα χρησιμοποιούσατε για την παράμετρο θ και γιατί;



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

6. Έστω X_1, X_2, \dots, X_{n+1} ακολουθία εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών η οποία λαμβάνει τις τιμές -1 και 1 και έτσι ώστε για κάθε $i > 1$ και x_1, x_2, \dots, x_n να ισχύει:

$$P(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i, \dots, X_1 = x_1) = P(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i).$$

Έστω ότι $P(X_1 = -1) = 1$ και για κάθε $i > 1$:

$$P(X_{i+1} = -1 \mid X_i = -1) = \theta$$

$$P(X_{i+1} = 1 \mid X_i = -1) = 1 - \theta$$

$$P(X_{i+1} = -1 \mid X_i = 1) = 0.75$$

$$P(X_{i+1} = 1 \mid X_i = 1) = 0.25$$

Υποθέτουμε ότι η παράμετρος $\theta \in (0, 1)$ και $x_1 = -1$. Να υπολογιστεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας του θ από τις παρατηρήσεις x_1, x_2, \dots, x_{n+1} .

