ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ
ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2003-2004

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Ταυτίζοντας το σύνολο των πραγματικών 2×2-πινάκων $M(2, \mathbf{R})$ με τον $\mathbf{R}^4$, δείξτε οτι το σύνολο

$$SL(2, \mathbf{R}) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{M(2, R)} | \det \mathbf{A} = \mathbf{1}\}$$

είναι υποπολλαπλότητα του $\mathbf{R}^4$.

2. Έστω ω η 2–μορφή

$$\omega = (x + \cos y + \cos z)\, dy\wedge dz + (e^{xz} + y)\, dz\wedge dx + (\sin xy + z)\, dx\wedge dy\ ,$$

και $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ η μοναδιαία σφαίρα στο $\mathbf{R}^3$.

Να υπολογισθεί

$$\int_{S^2} \omega\ .$$

3. Έστω M συμπαγής πολλαπλότητα διάστασης n και $f : M \to \mathbf{R}^n$ C^∞-διαφορίσιμη απεικόνιση. Δείξτε οτι υπάρχει $x \in M$ τέτοιο ώστε το διαφορικό της f στο x, df_x να μην είναι αντιστρέψιμο.

4. *i)* Έστω $\pi : S^2 \to \mathbf{RP^2}$, $(x,y,z) \mapsto [(x,y,z)]$. Δείξτε οτι η π είναι διαφορίσιμη και immersion.
ii) Είναι η απεικόνιση $g : \mathbf{RP^2} \to \mathbf{R^3}$, $[(x,y,z)] \mapsto (xy, yz, z^2)$, immersion·

5. Έστω

$$\begin{aligned} X &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \\ Y &= x^2 y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} \\ \omega &= (x^3+y^3+z^3)(dx\wedge dy + dz\wedge dx + dy\wedge dz)\ . \end{aligned}$$

i) Να υπολογισθεί $[X,Y]$.
ii) Να περιγράψετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου Y στο $\mathbf{R}^3$ που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0).
iii) Αν $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ είναι η συνάρτηση

$$f(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$$

να υπολογισθεί

$$f^*(d\omega)\ .$$

iv) Να υπολογισθεί $L_X\omega$.

6. *i)* Έστω M μια C^∞ πολλαπλότητα, $\Lambda(M)$ το σύνολο των εξωτερικών διαφορικών μορφών στην M, $Z(M)$ οι κλειστές μορφές και $B(M)$ οι ακριβείς μορφές. Δείξτε ότι η $Z(M)$ είναι υποάλγεβρα της $\Lambda(M)$ και $B(M)$ είναι ιδεώδες της $Z(M)$.

ii) Έστω ω C^∞ 1–μορφή στο μοναδιαίο κύκλο S^1 με

$$\int_{S^1} \omega = 0 \ .$$

Δείξτε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $f : S^1 \to \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $\omega = df$.

(Υπόδειξη: $\phi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

Θεωρία Πιθανοτήτων

Ονοματεπώνυμο: ....

Αρ. Ταυτότητας: ....

Εαρινό Εξάμηνο 2003-2004
31 Ιανουαρίου 2004
09:00 – 12:00

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

<u>Θέμα 1°</u>

(α) Δείξτε ότι ένα μέτρο μ ορισμένο σε ένα δακτύλιο $\mathbf{R}$ του Ω είναι τότε και μόνον τότε σ-πεπερασμένο εάν υπάρχει ένας διαχωρισμός (μία διαμέριση) $\{\mathbf{B_n} \mid \mathbf{n} \in \mathbf{N}\}$ του Ω με $\mathbf{B_n} \in \mathbf{R}$ και $\mu(\mathbf{B_n}) < \infty \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}$.

(β) Εστω $(\Omega, \Im, \mu)$ χώρος μέτρου, μ-πεπερασμένο μέτρο και $\{\mathbf{A_n} \mid \mathbf{n} \in \mathbf{N}\}$ ακολουθία ενδεχομένων στο $\Im$.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Fatou, δείξτε

(ι) $\mu\left(\liminf_{\mathbf{n}} \mathbf{A_n}\right) \leq \liminf_{\mathbf{n}} \mu(\mathbf{A_n})$.

(ιι) $\mu\left(\limsup_{\mathbf{n}} \mathbf{A_n}\right) \geq \limsup_{\mathbf{n}} \mu(\mathbf{A_n})$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

<u>Θέμα 2°</u>

(α) Εστω μ το περιεχόμενο ορισμένο στον ημιδακτύλιο $\mathbf{I}^1$ των δεξιά ανοικτών διαστημάτων του $\mathbf{R}$. Δείξτε ότι το μ είναι σ-υπερπροσθετικό στο $\mathbf{I}^1$.

(β) Εστω $(\Omega, \Im, \mu)$ χώρος μέτρου. Δώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η σταθερή συνάρτηση:

$$\mathbf{T}:\Omega \to \mathbf{R},\ \omega \mapsto \mathbf{T}(\omega) := \mathbf{c} \in \mathbf{R},$$

μ-ολοκληρώσιμη.

(γ) Εστω $f:(\Omega,\Im) \to (\overline{R}, B_{\overline{R}})$ μια $\Im \mid B_{\overline{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\mathbf{N}$ ένα σύνολο με $N \in \Im$ και $\mu\ (\mathbf{N}) = \mathbf{0}$.

Δείξτε ότι ισχύει:

(ι) $\mathbf{1_N f} \in \mathbb{L}^1\ (\mu)$

(ιι) $\int_{\mathbf{N}} \mathbf{f}\, d\mu = \mathbf{0}$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Θέμα 3°

(α) Εξετάστε αν το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\eta\mu\, x}{x}dx$ υπάρχει κατά Lebesque.

(β) Έστω $(\Omega, \Im, \mu)$ χώρος μέτρου με $A, B \in \Im$, $B \subset A$. Δείξτε ότι

$$\int_\Omega \left(I_A(x) - I_B(x)\right)^2 d\mu = \mu(A - B),$$

όπου I_C η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου C.

(γ) Εστω $(\Omega, \Im, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \Omega \to \mathbf{R}$. Αν $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\mathbf{f} \equiv 0 \quad \mu - \sigma.\pi.$ και $\mathbf{g} \equiv 0 \quad \mu - \sigma.\pi.$, δείξτε ότι $\mathbf{f} + \mathbf{g} \equiv 0 \quad \mu - \sigma.\pi.$

Συμβολισμός: $\mu - \sigma.\pi.$ σημαίνει μ - σχεδόν παντού.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

<u>Θέμα 4</u>:

Έστω X_i με $i = 1,2,\ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και κοινή διασπορά σ^2. Ορίζω

$$Y_n = n^{-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right), \quad n = 1,2,\ldots$$

όπου α γνωστή θετική σταθερά. Έστω $\{\Im_n, n \geq 1\}$ αύξουσα οικογένεια σ-πεδίων (σ-αλγεβρών) έτσι ώστε και η X_n και η Y_n είναι $\Im_n$-μετρήσιμες.

(α) Να δειχθεί ότι $\forall\, n \geq 1$ και $\forall\, m \geq 0$, $\mathbb{E}(Y_{n+m} \mid \Im_n) = r^{2\alpha} Y_n$ με πιθανότητα 1 όπου r ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ Y_n και Y_{n+m}.

(β) Μελετήστε τη σύγκλιση με πιθανότητα 1 της ακολουθίας $\{Y_n\}$.

<u>Θέμα 5</u>:

Ένα τυχαίο σημείο στο χώρο δίνεται από τρεις συντεταγμένες οι οποίες ορίζουν ένα τρισδιάστατο σύστημα κανονικών τυχαίων μεταβλητών με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{8}\left[2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2\right]\right)$$

(α) Να προσδιορισθεί ο πίνακας συνδιακύμανσης (variance-covariance matrix) των τυχαίων μεταβλητών **X, Y** και **Z**.

(β) Να προσδιορισθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W = Y + Z$.

(γ) Θεωρείστε ότι όλα τα δεδομένα παραμένουν ως έχουν εκτός από το συντελεστή συσχετίσεως ρ μεταξύ των **Y** και **Z** για τον οποίο είναι γνωστό μόνο ότι είναι θετικός.

Κάτω από την υπόθεση ότι $\mathbf{P[-\sqrt{4} \leq Y \leq \sqrt{4} \mid Z = -5] = 0.954}$ να προσδιορισθεί το ρ.

Δίδονται τα εξής: Φ(1)=0.84, Φ(1.645)=0.95, Φ(1.96)=0.975, Φ(2)=0.977, Φ(3)=0.9985 όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

<u>Θέμα 6</u>:

Βλήμα εκτοξεύεται κατά στόχου Ο ο οποίος λαμβάνεται ως αρχή του ορθογωνίου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων στο κατακόρυφο επίπεδο το διερχόμενο διά του Ο. Έστω $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}$ οι συντεταγμένες του σημείου προσκρούσεως. Τότε $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}$ είναι τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες θεωρούμε τη 2-διάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 25$ και συντελεστή συσχετίσεως ρ. Κάτω από την υπόθεση ότι $\rho = 0$ να προσδιορισθεί η πιθανότητα ώστε το σημείο προσκρούσεως να βρίσκεται
(i) εντός τετραγώνου με κέντρο το σημείο Ο και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες και μήκους 50 cm εκάστη και
(ii) εντός κύκλου με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 20 cm.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

Στατιστική Θεωρία

Ονοματεπώνυμο: ....

Αρ. Ταυτότητας: ....

Εαρινό Εξάμηνο 2003-2004
7 Φεβρουαρίου 2004
09:00 – 12:00

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

1. Έστω τυχαίο δείγμα $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)'$ από την (συνεχή) ομοιόμορφη κατανομή $U(0, \theta)$.

(α) Να προσδιορισθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) για την παράμετρο θ.

(β) Να προσδιορισθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο θ.

(γ) Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y_{(n)} = \max\limits_{1 \le i \le n} Y_i$ καθώς και της $Z = F(Y_{(n)})$ όπου F η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την $U(0, \theta)$.

(δ) Να προσδιορισθεί το ελαχίστου μήκους 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega = \{0, 1\}$. Έστω επίσης $L(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$. Έστω ο έλεγχος

$$H_0 : \theta = 0 \text{ έναντι } H_1 : \theta = 1.$$

(α) Να δοθεί ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση ϕ σε επίπεδο σημαντικότητας α $(0 < \alpha < 1)$. Ποια μορφή παίρνει αυτή όταν η $f(x;\theta)$ επιλέγεται να είναι η $N(\theta,1)$;

Για τα επόμενα ερωτήματα να χρησιμοποιηθεί η $N(\theta,1)$.

(β) Να δοθεί ο ορισμός της ισχύος της ελεγχοσυνάρτησης ϕ και να αποδειχθεί ότι είναι τουλάχιστον ίση με το μέγεθος της ελεγχοσυνάρτησης.

(γ) Να δειχθεί ότι η ελεγχοσυνάρτηση ϕ είναι ομοιομόρφως ισχυρότατη για τον έλεγχο

$$H_0 : \theta = 0 \text{ έναντι } H_1 : \theta > 0.$$

(δ) Να αποδειχθεί ότι η ελεγχοσυνάρτηση φ δεν δύναται να αποτελεί την ομοιομόρφως ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο

$$H_0 : \theta = 0 \text{ έναντι } H_1 : \theta \neq 0.$$

Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει ομοιομόρφως ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο αυτό. Να εξηγήσετε τους ισχυρισμούς σας.

(ε) Εξηγείστε με ποιόν τρόπο επιτυγχάνεται ο εντοπισμός ομοιομόρφως ισχυρότατης ελεγχοσυνάρτησης μέσα σε κατάλληλα επιλεγμένη κλάση ελεγχοσυναρτήσεων για τον έλεγχο του ερωτήματος (δ).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

3. Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα από συνεχή κατανομή. Έστω $X^{(\bullet)} = (X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})'$ το αντίστοιχο διατεταγμένο τυχαίο δείγμα, και $R = (R_1, R_2, ..., R_n)'$ το διάνυσμα των τάξεων των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_n$. Υποθέτουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές μεταξύ τους, δηλαδή δεν υπάρχουν ties στο τυχαίο δείγμα.

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του διανύσματος R.

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος $X^{(\bullet)}$ και να εξεταστεί αν τα διανύσματα R και $X^{(\bullet)}$ είναι ανεξάρτητα.

(γ) Αν επιπλέον η κατανομή του τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι συμμετρική ως προς το 0, να βρεθούν οι κατανομές των διανυσμάτων

$$Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)' \text{ και } Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)',$$

όπου $Y_i = sign(X_i), i = 1,2,...,n$ και $Z_i = |X_i|, i = 1,2,...n$ με $|.|$ την απόλυτη τιμή και $sign(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases}$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

4. Για $\lambda > 0$, η τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται θετική Poisson με παράμετρο λ αν έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας της μορφής

$$f_X(x,\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!(e^\lambda - 1)}, \text{ για } x = 1,2,3,.......$$

και 0 αλλιώς.

α) Να υπολογιστούν οι πρώτες δύο κεντρικές ροπές της X.

β) Έστω ότι αντί της X, παρατηρούμε την τυχαία μεταβλητή $V(X)$ η οποία ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο: έστω $U_1, U_2, ..., U_n$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και $V(n) = \min\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ για $n = 1,2,3,.....$ Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(V(X) > v)$ για όλα τα v.

γ) Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις που έχουμε είναι όπως στο (β). Έστω λ_0 σταθερά. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ομοιομόρφως ισχυρότατος έλεγχος επιπέδου σημαντικότητας α για $H_0 : \lambda = \lambda_0$ ως προς την εναλλακτική $H_1 : \lambda < \lambda_0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

5. Έστω Y τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1, δηλαδή

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, y \geq 0, \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma. \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι δοθέντος Y, έχουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από την κανονική κατανομή με μέση τιμή θ και διακύμανση $1/Y$, όπου $\theta \in (-\infty, \infty)$ και είναι άγνωστη παράμετρος.

α) Να υπολογίσετε το Cramer—Rao κάτω φράγμα για την παράμετρο θ.

β) Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ η οποία επιτυγχάνει το Cramer—Rao κάτω φράγμα.

γ) Γιατί το Cramer—Rao κάτω φράγμα δεν επιτυγχάνεται σε αυτήν την περίπτωση;

δ) Ποια εκτιμήτρια θα χρησιμοποιούσατε για την παράμετρο θ και γιατί;

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

6. Έστω $X_{1,}X_2,\ldots.,X_{n+1}$ ακολουθία εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών η οποία λαμβάνει τις τιμές -1 και 1 και έτσι ώστε για κάθε $i>1$ και $x_{1,}x_2,\ldots x_n$ να ισχύει:

$$P(X_{i+1}=x_{i+1}\mid X_i=x_i,\ldots.,X_1=x_1)=P(X_{i+1}=x_{i+1}\mid X_i=x_i).$$

Έστω ότι $P(X_1=-1)=1$ και για κάθε $i>1$:

$$P(X_{i+1}=-1\mid X_i=-1)=\theta$$
$$P(X_{i+1}=1\mid X_i=-1)=1-\theta$$
$$P(X_{i+1}=-1\mid X_i=1)=0.75$$
$$P(X_{i+1}=1\mid X_i=1)=0.25$$

Υποθέτουμε ότι η παράμετρος $\theta\in(0,1)$ και $x_1=-1$. Να υπολογιστεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας του θ από τις παρατηρήσεις $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$.